جامعة ذي قار
University of Thi - Qar
كلية العلوم
College of Science
جمهورية العراق
Republic of Iraq
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

تطبيقات البوابات المنطقية

مختبر الالكترونيات

م.م. فؤاد نمر عجيل

جامعة ذي قار – كلية العلوم

2016 - 2015

جمهورية العراق – وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ذي قار– كلية العلوم – قسم الفيزياء

تجارب الالكترونيات الرقمية للمرحلة الثانية

Digital Electronics Experiments

تطبيقات البوابات المنطقية

اعداد : م.م. فؤاد نمر عجيل

المحتويات:

التجربة الاولى: البوابات المنطقية الرئيسية والمشتقة

التجربة الثانية: أ- التعبير البوليني لدائرة منطقية

ب- تمثيل الدائرة المنطقية باستخدام التعبير البوليني

التجربة الثالثة: أ- تحويل التعبير البوليني الى جدول الحقيقة

ب- تمثيل الدوائر المنطقية من خلال جدول الحقيقة

التجربة الرابعة: تبسيط التعبير البوليني باستخدام قواعد الجبر البوليني

التجربة الخامسة: الدوائر المنطقية التوافقية

التجربة السادسة: خرائط كارنوف

تطبيقات البوابات المنطقية

تجربة رقم (1) **Experiment No. (1)**

البوابات المنطقية الرئيسية والمشتقة
Basic and Derived Logic Gates

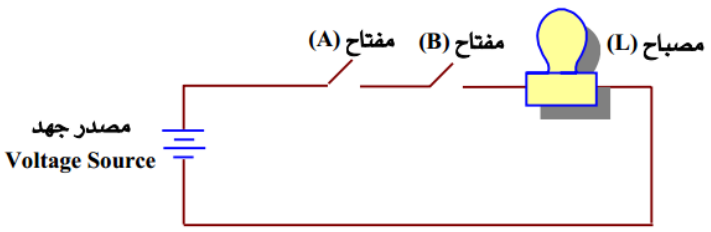
تمثل البوابات المنطقية حجر الأساس لبناء أي دائرة منطقية ومن ثم أي نظام رقمي أو منطقي، وحيث إن كلمة منطق ترمز إلى "عملية صنع القرار" لذا فإن بوابة المنطق هي البوابة التي تعطي خرج فقط عندما تتحقق شروط معينة على مدخلات هذه البوابة.

وفي هذه الوحدة سوف نتناول بالدراسة الأنواع المختلفة للبوابات المنطقية وسنبدأ بالبوابات الأساسية وهي بوابة AND، بوابة OR، بوابة NOT أو العاكس(INVERTER). ومن خلال التركيبات البسيطة لهذه البوابات الثلاث يمكننا الحصول على باقي أنواع البوابات الأخرى، ثم نقوم بعد ذلك بدراسة كيفية تجميع هذه البوابات لتمثيل دوائر منطقية بسيطة.

قبل أن نبدأ بدراسة البوابات المنطقية يجب أولا أخذ فكرة مبسطة عن المستويات التي تعمل عليها هذه البوابات، والمنطق الذي يتبع ذلك. وتعمل البوابات المنطقية على السماح بمرور البيانات أو عدم مرورها، وعند سماحها للبيانات بالمرور يمكن أن يقاس ذلك كجهد خرج لها وكذلك عند منعها، أي أن لها مستويان من جهد الخرج، وبالطبع فإن جهد الخرج عند السماح بمرور البيانات يختلف عن جهد الخرج عند منع مرورها، وهذان المستويان للخرج يناسبان تماما نظام الأعداد الثنائية -وعلى ذلك إذا كان جهد الخرج عاليا (HIGH) فإنه يقابل المستوى (١) الثنائي، وإذا كان منخفضا (LOW) فإنه يقابل المستوى (٠) الثنائي، وبتعبير آخر عندما يكون جهد الخرج يقابل المستوى (١) الثنائي فإنه يقال أن الخرج حقيقي (TRUE)، وعندما يكون جهد الخرج يقابل المستوى (٠) الثنائي فيقال أن الخرج زائف (FALSE).

بوابة AND
AND Gate

تعتبر البوابة AND واحدة من البوابات الأساسية والتي تدخل في بناء معظم الدوال المنطقية (Logic Functions). والبوابة AND لها مدخلان أو أكثر ولها خرج واحد، وتؤدي هذه البوابة ما يسمى بالضرب المنطقي (Logical Multiplication)، ويمكن تمثيل هذه البوابة بعدد من المفاتيح الموصلة على التوالي في دائرة كهربائية كما هو موضح في الشكل (١).

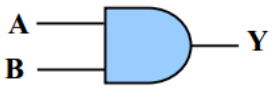


شكل (١) تمثيل البوابة AND كمفتاحين على التوالي.

A	B	L
مفتوح	مفتوح	غير مضاء
مفتوح	مغلق	غير مضاء
مغلق	مفتوح	غير مضاء
مغلق	مغلق	مضاء

جدول (١) جدول الحقيقة للدائرة في شكل (١).

يوضح الشكل (٢) الرمز المنطقي القياسي (Standard) للبوابة AND، حيث يظهر الدخلان A, B والخرج Y، ويسمى رمز البوابة AND بدخلين. ويبين الجدول (٢) جدول الحقيقة للبوابة AND بمدخلين.



شكل (٢) رمز البوابة AND.

المدخلات		الخرج
A	B	Y
٠	٠	٠
٠	١	٠
١	٠	٠
١	١	١

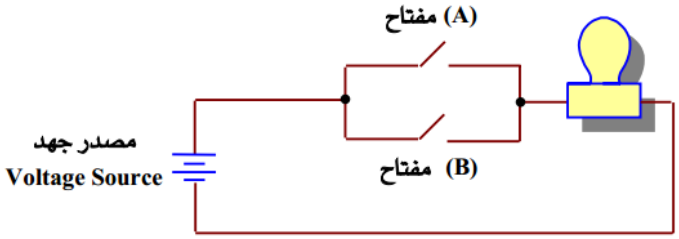
جدول (٢) جدول الحقيقة للبوابة AND بمدخلين.

يعتبر الجبر البوليني (Boolean Algebra) صيغة للمنطق الرمزي والذي يبين كيف تعمل البوابات المنطقية، والعبارة البولينية (Boolean Expression) هي طريقة مختصرة لإظهار ماذا يحدث في دائرة منطقية ما. والعبارة البولينية لبوابة AND ذات مدخلين هي:

$$Y = A \bullet B = AB$$

بوابة OR — OR Gate

تعتبر البوابة OR واحدة من البوابات الأساسية والتي تدخل في بناء معظم الدوال المنطقية. والبوابة OR لها مدخلان أو أكثر ولها خرج واحد، وتؤدي هذه البوابة ما يسمى بالجمع المنطقي (Logical Addition)، ويمكن تمثيل هذه البوابة بعدد من المفاتيح الموصلة على التوازي في دائرة كهربائية كما هو موضح بالشكل (٣).

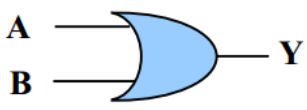


شكل (٣) تمثيل البوابة OR كمفتاحين على التوازي.

A	B	L
مفتوح	مفتوح	غير مضاء
مفتوح	مغلق	مضاء
مغلق	مفتوح	مضاء
مغلق	مغلق	مضاء

جدول (٣) جدول الحقيقة للدائرة في شكل (٣).

يوضح الشكل (٤) الرمز المنطقي القياسي للبوابة OR، حيث يظهر الدخلان A, B والخرج Y. ويبين الجدول (٤) جدول الحقيقة للبوابة OR بمدخلين.



شكل (٤) رمز البوابة OR.

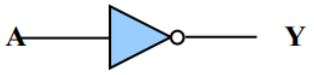
المدخلات		الخرج
A	B	Y
٠	٠	٠
٠	١	١
١	٠	١
١	١	١

جدول (٤) جدول الحقيقة للبوابة OR بمدخلين.

والعبارة البولينية لبوابة OR هي: $Y = A + B$

بوابة NOT (العاكس) NOT Gate (INVERTER)

العـــاكس أو بوابـــة NOT تـــؤدي عمليـــة يطلـــق عليهـــا العكـــس (Inversion) أو الإتمـــام (Complementation). والعاكس يغير المستوى المنطقي للدخل إلى عكسه، فإذا كان دخله (١) يغيره فى الخرج إلى (٠)، وإذا كان دخله (٠) يغيره إلى (١).



شكل(٥) رمز البوابة NOT.

الخرج	الدخل
Y	A
١	٠
٠	١

جدول(٥) جدول الحقيقة للبوابة NOT أو العاكس.

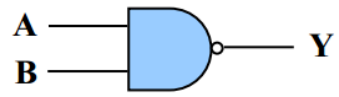
من جدول الحقيقة نجد أن الخرج يكون نفي أو عكس الدخل، ويعبر عن هذه العملية بالتعبير البوليني الآتي: $Y = \overline{A}$

وتقرأ على النحو التالي: الخرج Y يساوي not A وتسمى الإشارة فوق A باسم bar وبالتالي فإن التعبير البوليني يقرأ، الخرج Y يساوي A bar ($\overline{A}$).

بوابة NAND NAND Gate

كلمة (NAND) هي اختصار لكلمتي (NOT AND) وهي تعني عكس AND، وهذه البوابة يمكن الحصول عليها بتوصيل دخل بوابة العاكس مع خرج البوابة AND كما يبين ذلك شكل (٦)

كما يبين الشكل الرمز المنطقي لهذه البوابة حيث إنه رمز بوابة AND ولكن مع دائرة صغيرة عند الخرج والتى ترمز إلى بوابة العاكس.



شكل(٦) رمز البوابة NAND.

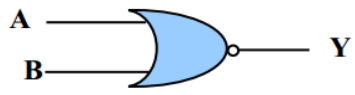
الخرج	المدخلات	
Y	B	A
١	٠	٠
١	١	٠
١	٠	١
٠	١	١

جدول (٦) جدول الحقيقة للبوابة NAND بمدخلين.

التعبير البوليني: $Y = \overline{AB}$

بوابة NOR NOR Gate

كلمة (NOR) هي أيضا اختصار لكلمتي (NOT OR) وهي تعني عكس OR، وهذه البوابة يمكن الحصول عليها بتوصيل دخل بوابة العاكس (NOT gate) مع خرج البوابة OR كما هو موضح في شكل (٧).



شكل (٧) رمز البوابة NOR.

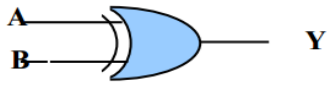
الخرج	المدخلات	
Y	B	A
١	٠	٠
٠	١	٠
٠	٠	١
٠	١	١

جدول (٧) جدول الحقيقة للبوابة NOR بمدخلين.

والتعبير البوليني: $Y = \overline{A + B}$

بوابة OR المنفردة (المنحصرة) Exclusive-OR Gate

تسمى البوابة OR المنفردة باسم بوابة "أيهما وليس كلاهما" وتختصر إلى XOR-gate، ويوضح شكل (٨) الرمز المنطقي للبوابة. والبوابة XOR تختلف عن البوابات السابق مناقشتها لأن عدد المدخلات لها هو دخلين فقط.



شكل (٨) رمز البوابة XOR.

المدخلات		الخرج
A	B	Y
٠	٠	٠
٠	١	١
١	٠	١
١	١	٠

جدول (٨) جدول الحقيقة للبوابة XOR.

جدول الحقيقة للبوابة XOR موضح في جدول (٨) ، ونلاحظ من الجدول أن الخرج (Y) لا يساوي (١) إلا إذا كان الدخلان A, B مختلفين، بمعنى أن يكون أحدهما (١) والآخر (٠) أو العكس، وتعطي خرجا يساوي (٠) عندما يكون الدخلان متساويين.

ومن جدول الحقيقة يمكن استنتاج التعبير البوليني لهذه البوابة وهو: $Y = \overline{A}B + A\overline{B}$

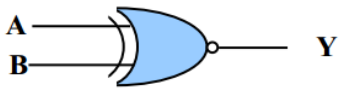
والذي يرمز إليه اختصارا بالتعبير المنطقي: $Y = A \oplus B$

والعلامة $\oplus$ تعني أن A منفردة أو B منفردة.

بوابة NOR المنفردة (المنحصرة) Exclusive-NOR Gate

البوابة NOR المنفردة وتختصر إلى XNOR-gate، عدد المدخلات لها لا يزيد عن دخلين أبدا كما هو الحال في البوابة XOR، ويوضح شكل (٩) الرمز المنطقي للبوابة.

جدول الحقيقة للبوابة XNOR موضح بالجدول (٩) ، ويلاحظ من الجدول أن الخرج (Y) لا يساوي (١) إلا إذا كان الدخلان A, B متساويين أي A = B = ٠ أو A = B = ١ ويعطي خرجا يساوي (٠) عندما يكون الدخلان مختلفين بمعنى أن يكون أحدهما (١) والآخر (٠) أو العكس.



شكل (٩) رمز البوابة XNOR.

المدخلات		الخرج
A	B	Y
٠	٠	١
٠	١	٠
١	٠	٠
١	١	١

جدول (٩) جدول الحقيقة للبوابة XNOR.

ومن جدول الحقيقة يمكن استنتاج التعبير البوليني لهذه البوابة وهو:

$$Y = AB + \overline{A}\overline{B}$$

والذي يرمز إليه إختصارا بالتعبير المنطقي:

$$Y = A \odot B$$

والعلامة $\odot$ تعني علامة التكافؤ. ومن التعبير البوليني السابق للبوابة XNOR يمكننا بناء البوابة باستخدام بوابات AND, OR, NOT.

تطبيقات البوابات المنطقية

تجربة رقم (2) **Experiment No. (2)**

أ- التعبير البوليني لدائرة منطقية

The Boolean Expression for a Logic Circuit

ب- تمثيل الدائرة المنطقية باستخدام التعبير البوليني

Implementation of a Logic Circuit Using a Boolean Expression

أ - لاستنتاج التعبير البوليني لأي دائرة منطقية، نبدأ من المدخلات في أقصى اليسار متجهين إلى الخرج النهائي للدائرة وذلك بكتابة الخرج لكل بوابة. وكمثال على ذلك، نفترض الدائرة المنطقية الموضحة في شكل (١). ويمكن استنتاج التعبير البوليني لهذه الدائرة كما يلي:

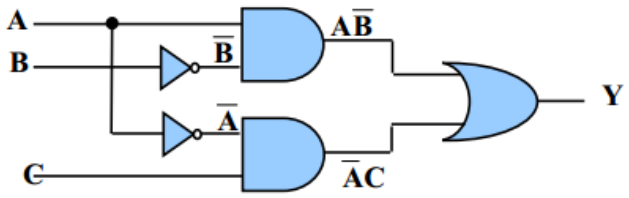
١. التعبير البوليني لبوابة AND والتي لها الدخلان $A, \overline{B}$ هو $A\overline{B}$.

٢. التعبير البوليني لبوابة AND والتي لها الدخلان $C, \overline{A}$ هو $\overline{A}C$.

٣. ويكون التعبير البوليني لبوابة OR والتي لها الدخلان $A\overline{B}, \overline{A}C$ هو $A\overline{B} + \overline{A}C$.

وعلى ذلك يكون الخرج النهائي للدائرة هو:

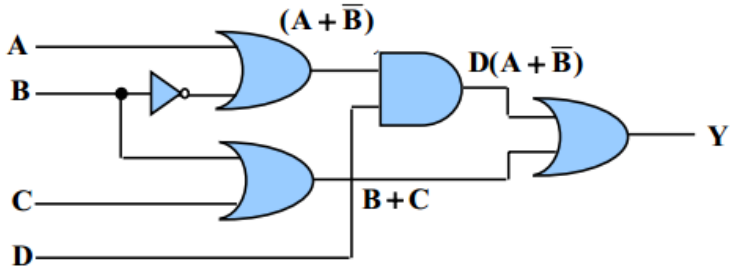
$$Y = A\overline{B} + \overline{A}C$$



شكل (١) دائرة منطقية تبين كيفية استنتاج التعبير البوليني للخرج.

مثال: اكتب التعبير البوليني للدائرة المنطقية الموضحة في شكل (٢).

الحل:



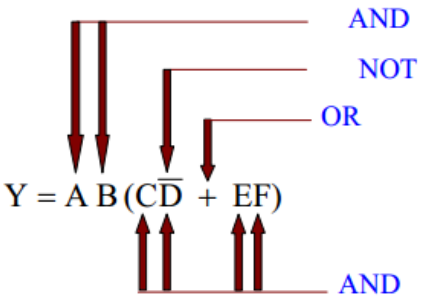
شكل (٢) الدائرة المنطقية وتبين كيفية الحصول على التعبير البوليني للخرج.

ويكون التعبير البوليني لخرج الدائرة النهائي هو: $Y = D(A + \overline{B}) + (B + C)$

ب - عن طريق بعض الأمثلة التوضيحية سوف نناقش الآن كيف يمكن تمثيل دائرة منطقية ما بمعلومية التعبير البوليني لها. لنفترض الآن أننا نريد تمثيل التعبير البوليني الآتي:

$$Y = AB(C\overline{D} + EF)$$

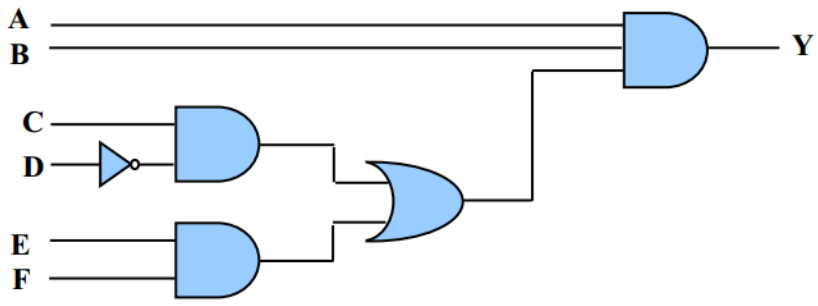
عند تقسيم هذا التعبير البوليني نجد أن المتغيرات A, B ثم $(C\overline{D} + EF)$ تمثل ثلاث مدخلات لبوابة AND، والمتغير $(C\overline{D} + EF)$ يمكن تشكيله بأخذ $C, \overline{D}$ على دخلي بوابة AND، وأخذ E,F على دخلي بوابة AND أخرى، ثم نأخذ كل من خرج البوابتين AND على دخلي بوابة OR. ويمكن توضيح عملية التقسيم السابقة كالآتي:



قبل أن نبدأ في تمثيل هذا التعبير البوليني يجب أولا الحصول على الحد $(C\overline{D} + EF)$؛ ولكن قبل الحصول على هذا الحد علينا الحصول على الحدين $C\overline{D}, EF$؛ ولكن قبل ذلك يجب الحصول على المتغير $\overline{D}$، وبذلك كما نرى هناك سلسلة من العمليات المنطقية يجب أن تتم على الترتيب. وعلى ذلك فإن البوابات المنطقية المطلوبة لتمثيل التعبير البوليني $AB(C\overline{D} + EF)$ هي:

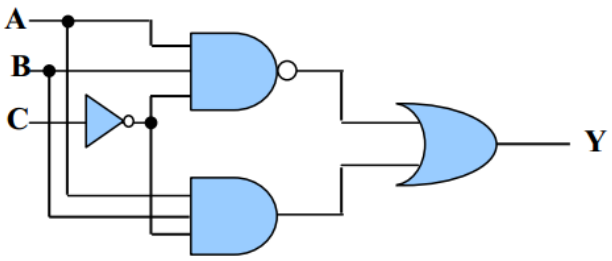
١. بوابة NOT لتمثيل المتغير $\overline{D}$.
٢. بوابتي AND لكل منهما مدخلان لتمثيل الحدين $C\overline{D}, EF$.
٣. بوابة OR ذات مدخلين لتمثيل الحد $(C\overline{D} + EF)$.
٤. بوابة AND لها ثلاثة مدخلات لتمثيل الخرج النهائي Y.

شكل الدائرة المنطقية للتعبير البوليني $\mathbf{AB(C\overline{D} + EF)}$.

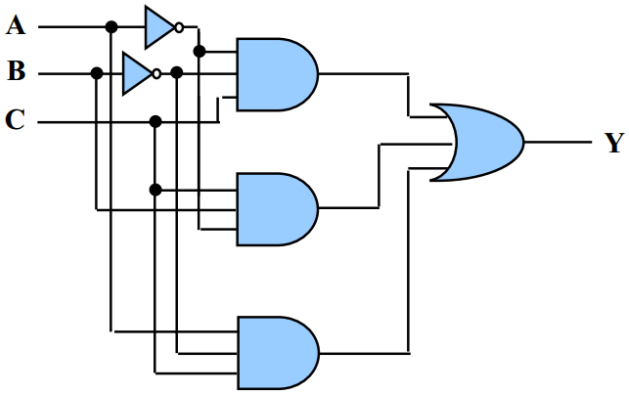


واجب 1 / اكتب التعبير البوليني للدوائر المنطقية الاتية:

-2-



-1-



واجب 2 / صمم الدوائر المنطقية باستخدام التعبير البوليني الاتي:

1) $Y = (A\bar{B}C) + (\bar{A}BC) + (AB\bar{C})$

2) $Y = \{(\bar{A}\bar{B}\bar{C}).(\bar{A}B)\} + (AB\bar{C})$

3) $Y = (\bar{A}B) + (AB)\,\bar{C}$

4) $Y = \{(AB\bar{C}) + (\bar{A}\bar{B}\bar{C}) + (\bar{A}\bar{B}\bar{C}) + (\bar{A}BC)\} + (ABC)$

5) $Y = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(ABC) + (CD\bar{E})$

6) $Y = (\bar{A}BC).(A + \bar{B}) + (B\bar{C}) + A + \bar{B} + C$

7) $Y = (ABC) + (DEF)(\bar{E}\bar{B}\bar{D})$

8) $Y = (A + B + \bar{D}).(A\bar{B}C) + (A\bar{D})(BC)$

تطبيقات البوابات المنطقية

Experiment No. (3) **تجربة رقم (3)**

أ- تحويل التعبير البوليني الى جدول الحقيقة
Converting a Boolean Expression to a Truth Table

ب- تمثيل الدوائر المنطقية من خلال جدول الحقيقة
Implementation of a Logic Circuit via a Truth Table

أ - جدول الحقيقة ببساطة هو عبارة عن قائمة بالتشكيلات المحتملة لعدد المتغيرات وقيم الخرج المقابلة لها (٠ or ١). وللتعبير البوليني المحتوي على متغيرين، هناك أربع تشكيلات مختلفة ($٤ = ٢^{٢}$)، وللتعبير المحتوي على ثلاثة متغيرات، هناك ثماني تشكيلات مختلفة ($٨ = ٢^{٣}$)، وهكذا.

لعمل جدول الحقيقة للتعبير البوليني، نبدأ بكتابة التشكيلات المختلفة حسب عدد المتغيرات الموجودة بالتعبير البوليني ثم نضع (١) في عمود الخرج (Y) لكل حد موجود في التعبير البوليني، ونضع (٠) أمام الحدود المتبقية، والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال : استنتج جدول الحقيقة للتعبير البوليني:

$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

الحل: هناك ثلاثة متغيرات (A, B, C) في التعبير البوليني المعطى، وبالتالي فهناك ثمانية احتمالات أو تشكيلات مختلفة لهذه المتغيرات كما هو موضح بالأعمدة الثلاثة على اليسار في الجدول (١).

القيم الثنائية لكل حد من الحدود الأربعة في التعبير البوليني هي:

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} = 000,\ \overline{A}B\overline{C} = 010,\ AB\overline{C} = 110,\ ABC = 111$$

أمام كل من هذه القيم الثنائية يوضع (١) في عمود الخرج (Y) كما هو موضح بالجدول، ولكل التشكيلات الثنائية المتبقية يوضع (٠) في عمود الخرج (Y).

المدخلات			الخرج
A	B	C	Y
٠	٠	٠	١
٠	٠	١	٠
٠	١	٠	١
٠	١	١	٠
١	٠	٠	٠
١	٠	١	٠
١	١	٠	١
١	١	١	١

جدول (١) جدول الحقيقة للتعبير البوليني $\mathbf{Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC}$.

- للتوضيح :يمكن استنتاج عدد التشكيلات -أو الاحتمالات للمدخلات الثنائية لأي بوابة عن طريق العلاقة: $N = 2^n$ حيث: N عدد التشكيلات المحتملة و n عدد المدخلات للبوابة.

ب - سوف نتعرف في هذا الجزء على كيفية تمثيل دائرة منطقية من خلال جدول الحقيقة الخاص بها بدلا من التعبير البوليني، حيث يمكن لنا كتابة التعبير البوليني من جدول الحقيقة ومن ثم تمثيل الدائرة المنطقية. جدول (٢) يبين جدول الحقيقة لدائرة منطقية ما، والمراد تمثيل هذه الدائرة والتي تحقق هذا الجدول. يمكن الحصول على التعبير البوليني من جدول الحقيقة كما يلي:

١. نحدد من جدول الحقيقة تشكيلة المدخلات التي تعطي الخرج Y = ١، ففي الصف الثالث من الجدول نجد أن الخرج Y = ١ حيث قيمة المدخلات هي A = ٠, B = ١, C = ٠، وتكتب بالتعبير البوليني على الشكل $\overline{A}B\overline{C}$ حيث يكتب المتغير برمزه إذا كان يساوي (١)، ويكتب بعكس رمزه إذا كان يساوي (٠)، وبالمثل فإن الخرج يساوي (١) في الصف السابع من الجدول والذي يكتب بالتعبير البوليني على الشكل $AB\overline{C}$.

المدخلات			الخرج
A	B	C	Y
٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	٠
٠	١	٠	١
٠	١	١	٠
١	٠	٠	٠
١	٠	١	٠
١	١	٠	١
١	١	١	٠

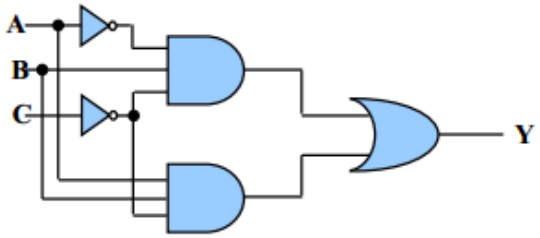
جدول (٢) جدول الحقيقة لدائرة منطقية ما يراد تمثيلها.

٢. بتجميع التعبيرات البولينية التي تعطي الخرج Y = ١ عن طريق بوابة OR نحصل على:

$$Y = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$$

الحد الأول في التعبير البوليني السابق $\overline{A}B\overline{C}$ يمكن تمثيله عن طريق تجميع المتغيرات الثلاثة $\overline{A}, B, \overline{C}$ على بوابة AND، والحد الثاني من التعبير البوليني $AB\overline{C}$ يمكن تمثيله عن طريق تجميع المتغيرات الثلاثة $A, B, \overline{C}$ على بوابة AND، وبتجميع الحدين الأول والثاني على بوابة OR يمكننا الحصول على التعبير البوليني للخرج Y.

والبوابات المنطقية المطلوبة لتمثيل التعبير البوليني السابق هي: بوابتان NOT لتمثيل كل من المتغيرين $\overline{A}, \overline{C}$؛ بوابتان AND ذات ثلاثة مدخلات لتمثيل الحدين $\overline{A}B\overline{C}$ ، $AB\overline{C}$ ، وبوابة OR بدخلين لنحصل منها على دالة الخرج النهائي $\overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$ ، والدائرة المنطقية التي تمثل هذا التعبير البوليني موضحة في شكل (١).



شكل (١) الدائرة المنطقية للتعبير البوليني $\overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$.

واجب 1 / استنتج جداول الحقيقة المكافئة للتعابير البولينية الاتية:

1) $Y = (A + B)C$

2) $Y = (A + B)(\bar{B} + C)$

3) $Y = A(AC + \bar{A}B)$

4) $Y = A(A + \bar{A}B)$

واجب 2 / استنتج الدائرة المنطقية المطلوبة لتمثيل جداول الحقيقة الموضحة ادناه:

(1)

المدخلات			الخرج
A	B	C	Y
٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	١
٠	١	٠	٠
٠	١	١	١
١	٠	٠	٠
١	٠	١	١
١	١	٠	٠
١	١	١	٠

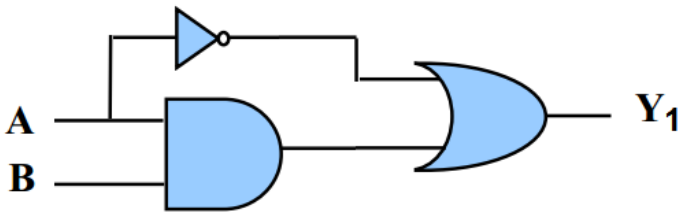
(2)

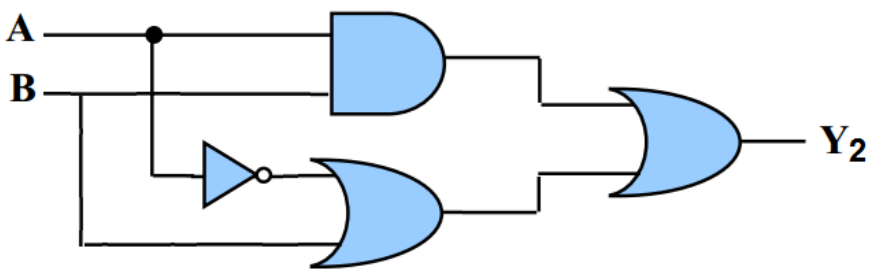
المدخلات			الخرج
A	B	C	Y
٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	١
٠	١	٠	٠
٠	١	١	١
١	٠	٠	٠
١	٠	١	١
١	١	٠	٠
١	١	١	١

(3)

المدخلات			الخرج
A	B	C	Y
٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	٠
٠	١	٠	١
٠	١	١	٠
١	٠	٠	١
١	٠	١	١
١	١	٠	١
١	١	١	٠

واجب 3 / استنتج جداول الحقيقة المكافئة للدوائر المنطقية الاتية:





تطبيقات البوابات المنطقية

تجربة رقم (4) **Experiment No. (4)**

تبسيط التعبير البوليني باستخدام قواعد الجبر البوليني

Simplification of Boolean Expressions Using Rules of Boolean algebra

جدول (١) يبين القواعد الأساسية للجبر البوليني والتي تستخدم في تناول وتبسيط التعبيرات البولينية.

١. $A + ٠ = A$	٢. $A + ١ = ١$
٣. $A \bullet ٠ = ٠$	٤. $A \bullet ١ = A$
٥. $A + A = A$	٦. $A + \overline{A} = ١$
٧. $A \bullet A = A$	٨. $A \bullet \overline{A} = ٠$
٩. $\overline{\overline{A}} = A$	١٠. $A + AB = A$

جدول (١) القواعد الأساسية للجبر البوليني.

تستخدم قواعد الجبر البوليني والتي سبق شرحها لتبسيط الدوال المنطقية (التعبيرات البولينية) وذلك لتمثيلها بأقل عدد من البوابات المنطقية، وكذلك بأقل عدد من المدخلات، ولذلك فإنه عند تمثيل هذه الدوال المنطقية عمليا، يجب أولا أن نضعها في أبسط صورة ممكنة لاقتصاديات التصميم، والمثال التالي يوضح كيفية إجراء عملية التبسيط.

مثال: باستخدام قواعد الجبر البوليني بسط الدالة المنطقية الآتية:

$$Y = AB + A(A + C) + B(A + C)$$

الحل: الخطوة الأولى في عملية التبسيط هي فك الأقواس الموجودة بالدالة فنحصل على:

$$Y = AB + AA + AC + AB + BC$$

نعوض عن قيمة الحد AA بالمتغير A (راجع القاعدة رقم ٧ من قواعد الجبر البوليني) فتصبح الدالة:

$$Y = AB + A + AC + AB + BC$$

وبتطبيق القاعدة رقم ٥ حيث $A + A = A$، فإن $AB + AB = AB$، وتصبح الدالة:

$$Y = AB + A + AC + BC$$

وبأخذ المتغير A عامل مشترك بين الحد الأول والثاني والثالث فنحصل على:

$$Y = A(B + 1 + C) + BC$$

وبتطبيق القاعدة رقم ٢ حيث $A + ١ = ١$، نجد أن:

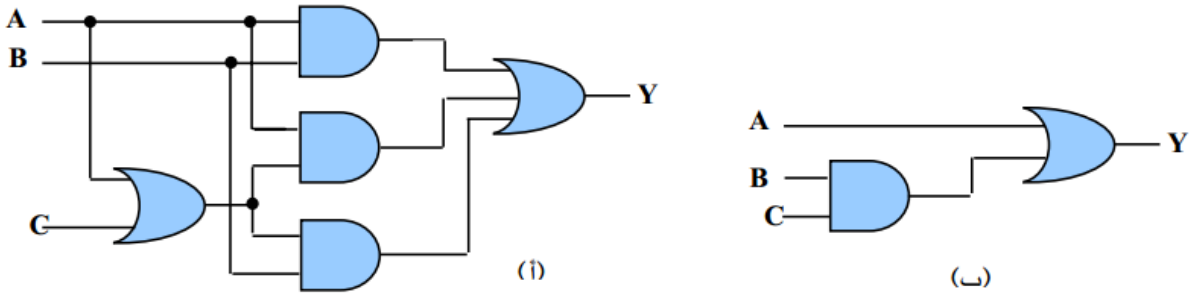
$$Y = A \bullet ١ + BC$$

وأخيرا بتطبيق القاعدة رقم ٤ حيث $A \bullet ١ = A$، نحصل على:

$$Y = A + BC$$

أنه عند اكتساب الخبرة في تطبيق قواعد الجبر البوليني فليس من الضروري تبسيط الدالة على شكل خطوات، ولكننا نبين هنا فقط كيفية الوصول إلى الصورة النهائية للدالة المبسطة وما هي القواعد التي تم استخدامها.

شكل (١) يوضح كيف أمكن تمثيل الدالة بعد تبسيطها بأقل عدد ممكن من البوابات حيث أمكن تمثيلها باستخدام بوابتين فقط (الشكل(ب))، بينما أحتاج تمثيل الدالة الأصلية قبل التبسيط إلى خمس بوابات (الشكل(أ)).



شكل (١) تمثيل الدالة المنطقية قبل وبعد تبسيطها.

ومن المهم التحقق من أن هاتين الدائرتين متكافئتان، بمعنى أنه لأي تشكيلة من المدخلات A, B, C، نحصل على نفس الخرج من الدائرتين.

مثال : ضع التعبير البوليني الآتي في أبسط صورة ثم ارسم الدائرة المنطقية للتعبير قبل وبعد التبسيط.

$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$$

الحل: بأخذ الحدين الأول والثاني مع بعضهما، وكذلك الحدين الثالث والرابع، نحصل على:

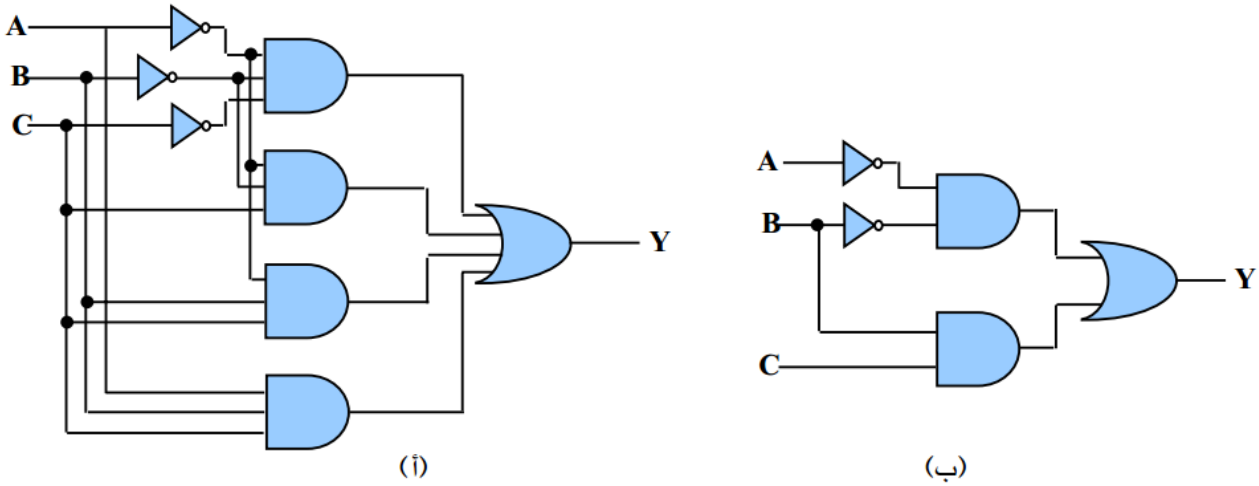
$$Y = (\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C) + (\overline{A}BC + ABC)$$
$$= \overline{A}\overline{B}(\overline{C} + C) + BC(\overline{A} + A)$$

وبتطبيق القاعدة رقم ٦ نحصل على:

$$Y = \overline{A}\overline{B} \bullet 1 + BC \bullet 1$$

ثم بتطبيق القاعدة رقم ٤ نحصل على الصورة النهائية للتعبير البوليني وهي:

$$Y = \overline{A}\overline{B} + BC$$



شكل (٢) يوضح تمثيل التعبير البوليني بالبوابات قبل وبعد عملية التبسيط.

واجب / بسط التعابير البولينية الاتية ، ثم صمم الدوائر المنطقية المكافئة لها قبل وبعد التبسيط :

1) $Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC$

2) $Y = B.(A + C) + C$

3) $Y = (A + B).(B.C) + A$

4) $Y = (A.B).(B + C)$

5) $Y = \{(A.B) + (A.B.C)\} + (A.B).(A + B + C)$

6) $Y = (A + \bar{A})(AB + AB\bar{C})$

7) $Y = AB + (\bar{A} + \bar{B})C + AB$

8) $Y = \bar{A}B + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BCD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D}E$

9) $Y = (A + \bar{B}).(A + C)$

10) $Y = \overline{\{(A.B) + (\bar{A} + C)\}}$

11) $Y = \overline{(A.B).(B + C)}$

تطبيقات البوابات المنطقية

تجربة رقم (5) **Experiment No. (5)**

الدوائر المنطقية التوافقية
Combinational logic circuits

نظريات ديمورجان Demorgan's Theorems

نظريات ديمورجان تعتبر جزءً هاماً من الجبر البوليني، فهذه النظريات تستخدم لتحويل التعبيرات الجبرية من وضعية AND الأساسية إلى وضعية OR وبالعكس. كما تسمح لنا بحذف العلامات الفوقية (bars) من المتغيرات المتعددة، ويمكن كتابة نظريتا ديمورجان لمتغيرين على الشكل التالي:

نظرية ديمورجان الأولى: $\overline{A+B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$

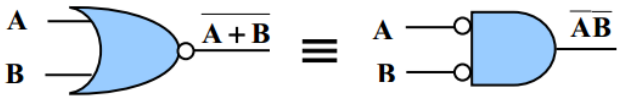
نظرية ديمورجان الثانية: $\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$

البوابة NOR تكافئ البوابة AND السالبة

البوابة NAND تكافئ البوابة OR السالبة

المدخلات		الخرج	
A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A} \bullet \overline{B}$
٠	٠	١	١
٠	١	٠	٠
١	٠	٠	٠
١	١	٠	٠

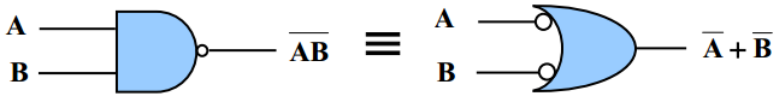
جدول (١) اثبات نظرية ديمورجان الأولى.



شكل (١) التغير من وضعية OR إلى وضعية AND.

المدخلات		الخرج	
A	B	$\overline{A \bullet B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
٠	٠	١	١
٠	١	١	١
١	٠	١	١
١	١	٠	٠

جدول (٢) اثبات نظرية ديمورجان الثانية.



شكل (٢) التغير من وضعية AND إلى وضعية OR.

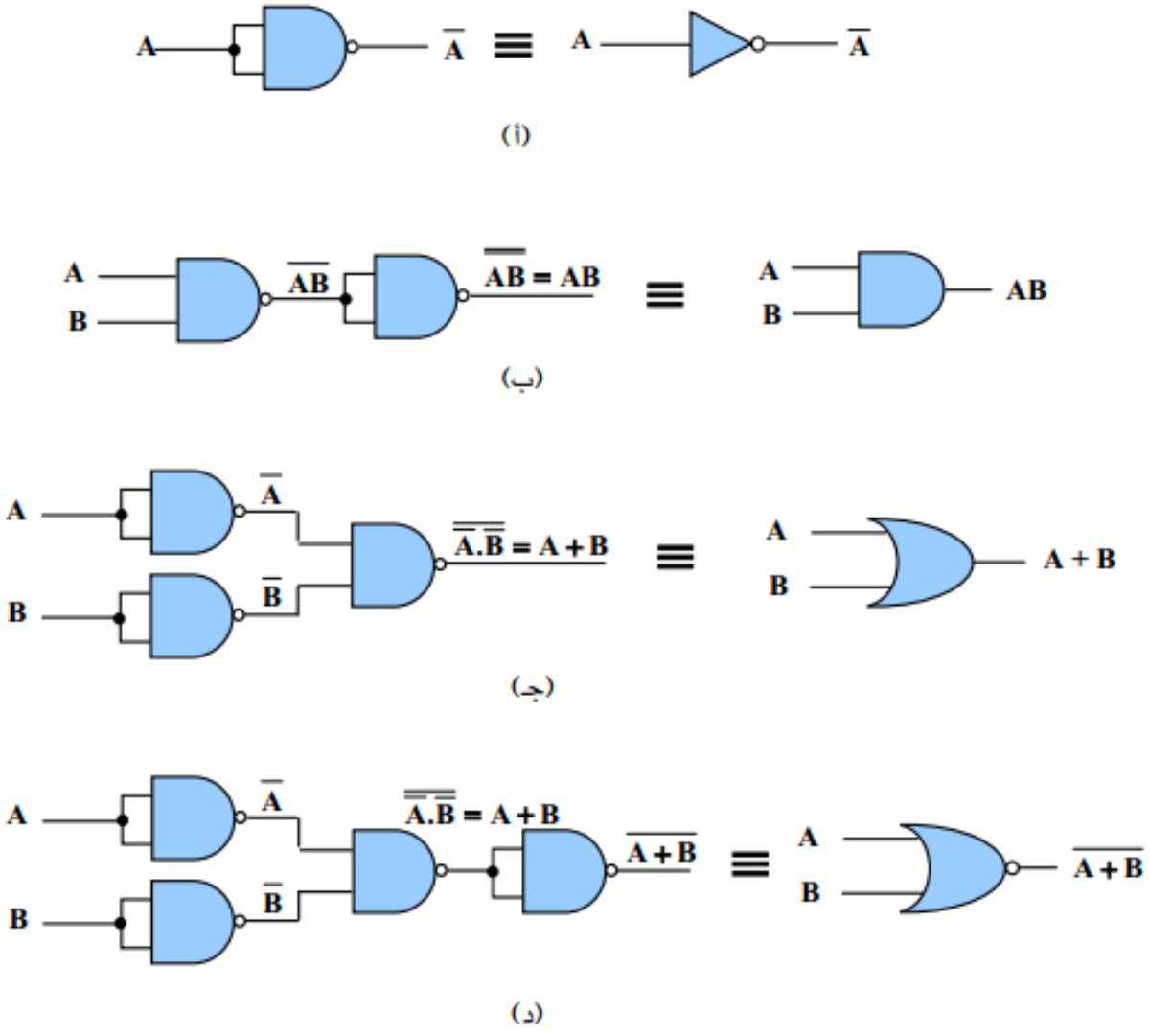
مثال: طبق نظريات ديمورجان على التعبير البوليني التالي: $Y = \overline{(\overline{A}+B)+CD}$

الحل:

$$Y = \overline{(\overline{A}+B)+CD}$$
$$= \overline{(\overline{A}+B)}.\overline{CD}$$
$$= (\overline{\overline{A}}.\overline{B})(\overline{C}+\overline{D})$$
$$= A\overline{B}(\overline{C}+\overline{D})$$

البوابة NAND كعنصر منطقي عام NAND gate as a Universal Logic Element

البوابة NAND هي بوابة عامة لأنه يمكن استخدامها في تنفيذ عملية العاكس، وعملية AND، وعملية OR، وكذلك عملية NOR.

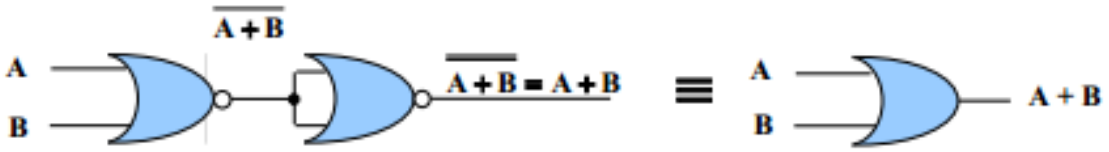


شكل (٣) التطبيق العام لبوابات NAND.

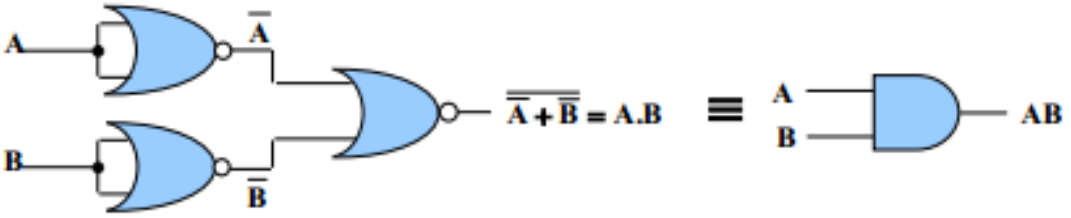
البوابة NOR كعنصر منطقي عام NOR Gate as a Universal Logic Element

مثل بوابة NAND، فإن البوابة NOR يمكن استخدامها لبناء بوابات عاكس، AND، OR، وكذلك بوابة NAND.

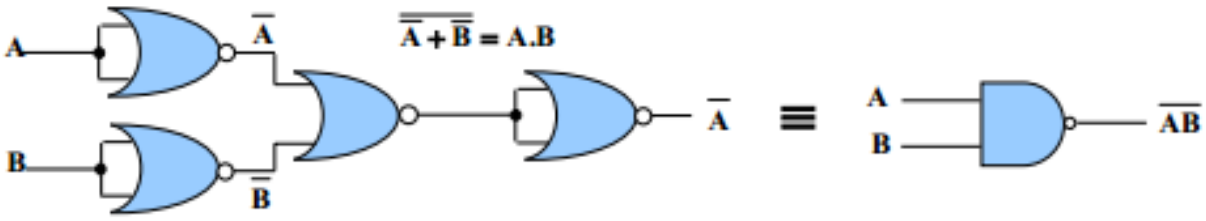
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

شكل (٤) التطبيق العام لبوابات NOR.

واجب 1 /

١) طبق نظريات ديمورجان على كل من التعبيرات الآتية:

a) $\overline{A\overline{B}(C+\overline{D})}$

b) $\overline{AB(CD+EF)}$

c) $\overline{(A+\overline{B}+C+\overline{D})}+\overline{ABC\overline{D}}$

d) $\overline{\overline{(\overline{A}+B+C+D)}\,\overline{(A\overline{B}\overline{C}D)}}$

٢) حقق كل من التعبيرات المنطقية الآتية مستخدما بوابات NAND فقط:

a) $ABCD+\overline{D}E$

b) $A\overline{B}C+AB+\overline{D}$

c) $A\overline{B}\overline{C}+D+E$

d) $A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC+AB\overline{C}$

٣) حقق كل من التعبيرات المنطقية الآتية مستخدما بوابات NOR فقط:

a) $(A+B+C)(A+\overline{B})$

b) $\overline{A\overline{B}\overline{C}+(D+\overline{E})}$

c) $(\overline{A}B+C)(D\overline{E}+\overline{F})$

d) $\overline{\overline{(A+\overline{B})}+\overline{(\overline{C}+D)}}$

واجب 2 /

1. **صمم الدائرة المكافئة لبوابة (XNOR) باستخدام بوابات (NAND) فقط .**
2. **صمم الدائرة المكافئة لبوابة (XNOR) باستخدام بوابة واحدة فقط لكل من (OR , NOR , AND).**
3. **صمم الدائرة المكافئة لبوابة (XNOR) باستخدام بوابات (OR , NAND) فقط .**
4. **صمم الدائرة المكافئة لبوابة (XOR) باستخدام بوابات (OR , NAND , AND) فقط .**
5. **صمم الدائرة المكافئة لبوابة (XOR) باستخدام بوابات (NOR , NAND) فقط .**
6. **صمم الدائرة المكافئة لبوابة (AND) باستخدام بوابات (NOR) فقط .**
7. **صمم الدائرة المكافئة لبوابة (OR) باستخدام بوابات (NAND) فقط .**

تطبيقات البوابات المنطقية

تجربة رقم (6) **Experiment No. (6)**

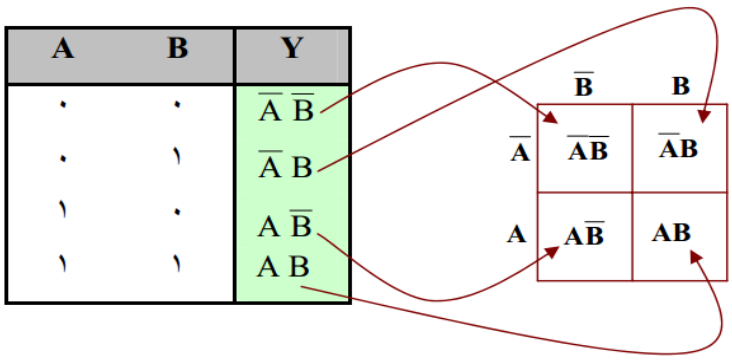
خرائط كارنوف
Karnaugh Maps

خريطة كارنوف أو خريطة -K هي طريقة مرئية لتبسيط التعبيرات الجبرية، وإذا ما استخدمت بطريقة جيدة فسوف تعطي لنا التعبير البوليني في أبسط صورة ممكنة. وكما رأينا في الوحدة السابقة فإن استخدام قواعد الجبر البوليني لتبسيط تعبير جبري ما يعتمد إلى حد كبير على الإلمام بجميع قواعد الجبر البوليني وكذلك القابلية لتطبيقه، وعادة فإن المهارة غالباً تمثل عامل هام في التبسيط باستخدام قواعد الجبر المنطقي. من ناحية أخرى فإن خريطة كارنوف تقدم لنا طريقة سهلة للتبسيط.

وخريطة كارنوف تماثل جدول الحقيقة لأنها تعطي لنا كل القيم المحتملة للمدخلات ونتيجة الخرج لكل قيمة. وبدلاً من تنظيمها على شكل أعمدة وصفوف مثل جدول الحقيقة، فإن خريطة كارنوف عبارة عن مصفوفة (array) من الخلايا (cells) ، وتمثل كل خلية القيمة الثنائية لإحدى تشكيلات المدخلات. وترتب الخلايا بطريقة تجعل عملية التبسيط للتعبير المعطى وتجميع الخلايا في غاية السهولة.

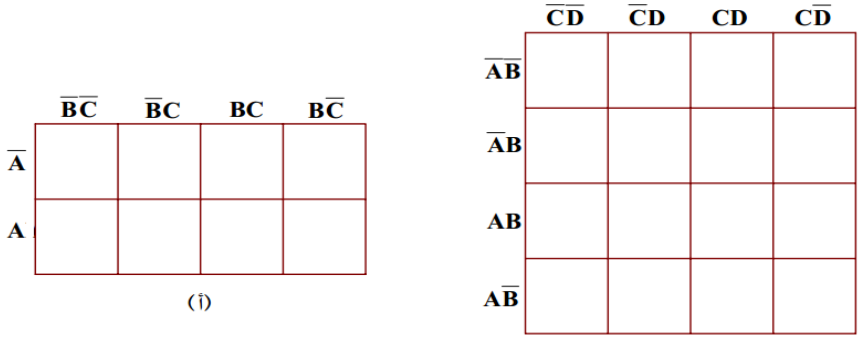
التبسيط باستخدام خرائط كارنوف Simplification using Karnaugh-map

عرفنا سابقاً أن عدد الخلايا في خريطة كارنوف يعتمد على عدد المتغيرات (المدخلات). وكمثال في شكل (١) ، هناك متغيران فقط هما (A، B) والمتمم لهما ($\overline{A}, \overline{B}$) وبناء على ذلك فإن خريطة كارنوف تحتوي (كما في جدول الحقيقة لمتغيرين) فقط على أربعة تشكيلات (٠٠،٠١،١٠،١١).



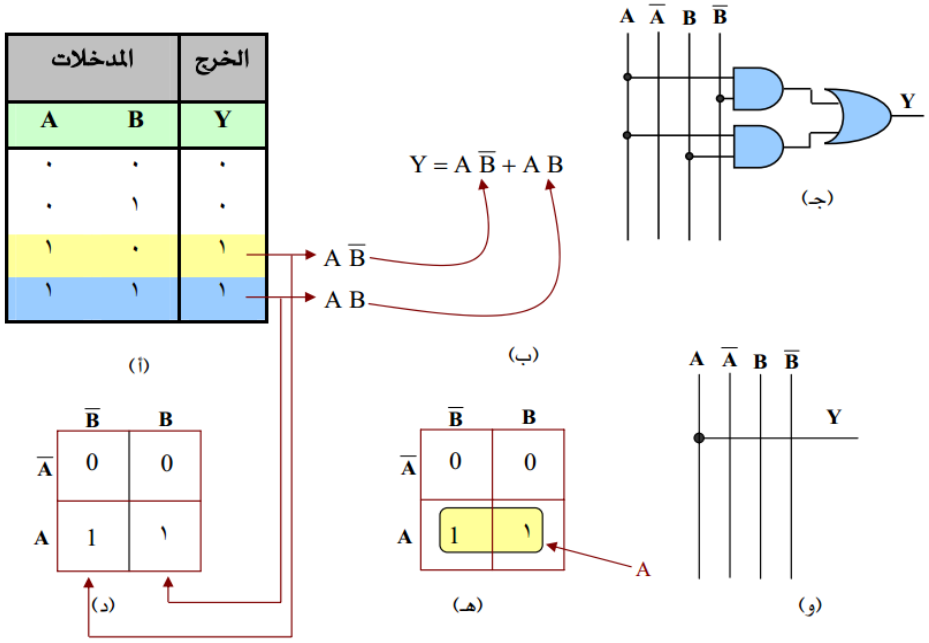
شكل (١) إعادة ترتيب جدول الحقيقة في خريطة كارنوف.

خريطة كارنوف لمتغيرين (٤ = $٢^{٢}$ خلايا).



شكل (2) خريطة كارنوف لثلاثة واربعة متغيرات.

والآن بعد معرفتنا لكيفية إنشاء خريطة كارنوف، فسوف نرى كيف يمكن أن تستخدم لتبسيط الدوائر المنطقية. وكمثال على ذلك، نفترض أننا نريد تصميم دائرة منطقية لها جدول الحقيقة الموضح في شكل (٣).



شكل (٣) كيفية استخدام خريطة كارنوف في تبسيط دائرة منطقية.

الخطوة الأولى هي الحصول على التعبير البوليني من خلال جدول الحقيقة، وذلك بكتابة التشكيلة التي أمامها (١) في الخرج وبعد ذلك نجمع هذه التشكيلات باستخدام بوابة OR كما في شكل ٣ (ب).

الدائرة المنطقية المكافئة لهذه المعادلة موضحة في شكل ٣ (جـ). الخطوة التالية هي تمثيل هذا التعبير البوليني على خريطة كارنوف لمتغيرين كما نرى في شكل ٣ (د).

تبسط المعادلات البولينية بصفة عامة يمكن الحصول عليه عن طريق تطبيق قاعدة المتممات (Complements)، والتي تقول أن $A + \overline{A} = 1$. والآن وبعد تمثيل المعادلة البولينية على خريطة كارنوف كما في شكل ٣ (د)، الخطوة التالية هي تجميع الحدود ثم نحدد العامل المشترك بينها.

فاذا نظرنا إلى خريطة كارنوف في شكل ٣ (د) فسوف نرى أن الخلايا المتجاورة (adjacent cells) تختلف في متغير واحد فقط. وهذا يعني أننا لو حركنا أي منهما من مكانه إلى الخلية المجاورة له رأسياً أو أفقياً، فلن يحدث تغيير إلا في متغير واحد فقط. وبتجميع الخلايا المتجاورة المحتوية على (١) كما نرى من الشكل ٣ (هـ) فإنه يمكن تبسيط الخلايا باستخدام قاعدة المتممات وجعلها حد واحد. في هذا المثال الخلايا $A\overline{B}, AB$ تحتوي على B ، $\overline{B}$ وبالتالي يتم حذف هذه المتممات، وتكون النتيجة، A كما يلي:

$$Y = A\overline{B} + AB \quad \text{(الأزواج المجمعة)}$$

$$Y = A(\overline{B} + B) \quad = A \bullet 1 = A$$

هذا التحليل يمكن استنتاجه بدراسة جدول الحقيقة للدائرة الموضحه في شكل ٣ (أ) والذي نرى فيه أن الخرج (Y) يتبع تماماً الدخل (A). وبناء على ذلك تكون الدائرة المكافئة كما هو موضح في شكل ٣ (و).

مثال: صمم دائرة منطقية في أبسط صورة لجدول الحقيقة الموضح في شكل ٤ (أ) مبيناً كل خطوة في عملية التبسيط.

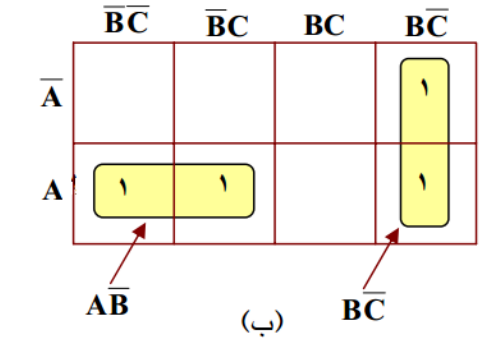
الحل: لدينا هنا ثلاثة متغيرات، والخطوة الأولى هي رسم خريطة كارنوف لثلاثة متغيرات، كما هو موضح في شكل ٤ (ب).

الخطوة الثانية أن ننظر إلى الخرج الذي يساوي (١) في جدول الحقيقة في شكل ٤ (أ) ثم نقوم بوضع هذه الآحاد في الخلايا المكافئة لها على خريطة كارنوف كما هو موضح في شكل ٤ (ب). وبعد وضع (٠) في الخلايا الفارغة المتبقية، نجمع الآحاد في شكل أزواج كما في شكل ٤ (ب) ، ثم نحدد من خلال الصف والعمود المتغيرات المشتركة في هذه المجموعات (الأزواج) لنرى أي متغير سوف يتم حذفه تبعاً لقاعدة المتممات. في المجموعة التي على اليمين $A,\overline{A}$ يتم حذفهم والنتيجة $\overline{B}C$ ، وفي المجموعة التي على اليسار يتم حذف $C,\overline{C}$ والنتيجة $A\overline{B}$.

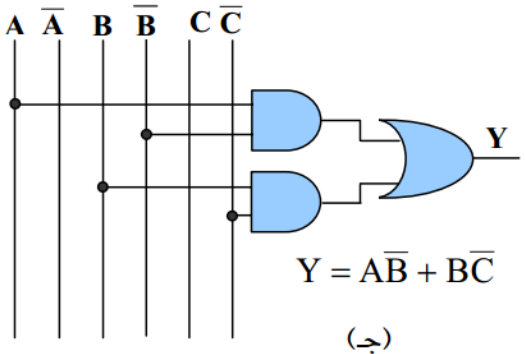
والحدود السابقة المبسطة سوف تشكل لنا المعادلة البولينية المكافئة بعد التبيسط والدائرة المنطقية، كما نرى في شكل ٤ (جـ). وفي هذا المثال نرى أن المعادلة الأصلية تتكون من أربعة حدود كل حد منها يمثل بوابة AND بثلاثة مداخل مجمعة على بوابة OR بأربعة مداخل أي أن عدد المداخل الكلية يساوي ١٦ مدخلاً، وبعد التبسيط أصبحت الدائرة تتكون من حدين كل منهما ممثل ببوابة AND بمدخلين مجمعين على بوابة OR بمدخلين أيضاً، وبالتالي يصبح عدد المداخل الكلية للدائرة بعد التبسيط يساوي ٦ مدخلات كما نرى في الشكل ٤ (جـ).

المدخلات			الخرج
A	B	C	Y
٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	٠
٠	١	٠	١
٠	١	١	٠
١	٠	٠	١
١	٠	١	١
١	١	٠	١
١	١	١	٠

(أ)

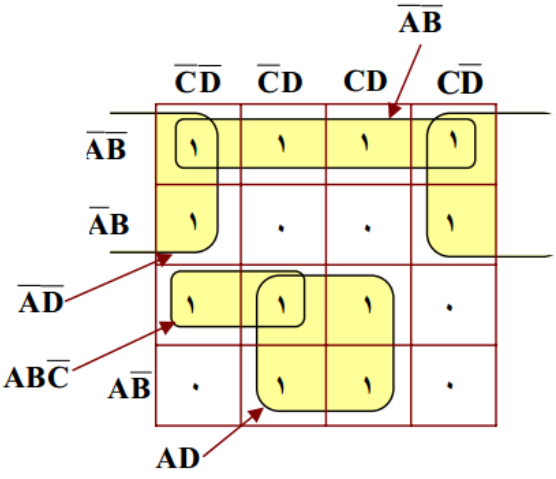


(ب)



(جـ)

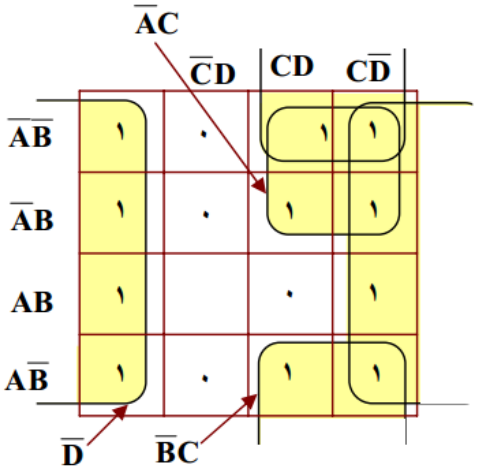
الآحاد (١'s) في خريطة كارنوف يمكن أن تجمع كأزواج (مجموعات من اثنين) أو مجموعات من أربعة ، أو ثمانية، أو ستة عشر وهكذا لكل القوى ٢. شكل (٥) يوضح بعض الأمثلة للتجميع، وكيف أن خريطة كارنوف تستخدم لتبسيط التعبيرات البولينية الكبيرة. لاحظ أن المجموعات الكبيرة أي التي تحتوي على عدد كبير من الآحاد (١'s) تعطي لنا حد صغير وعليه تكون البوابات المستخدمة في التصميم لها مدخلات قليلة. ولهذا السبب يجب أن نبدأ بالبحث عن المجموعات التي تحتوي على أكبر عدد من الأحاد، فإن لم نجد نبحث عن الأقل وهكذا (بمعنى أننا نبحث عن المجموعات التي تحتوي على ثماني آحاد، فإن لم نجد نبحث عن المجموعات التي تحتوي على أربعة آحاد، وأخيراً فإن لم نجد نبحث عن المجموعات التي تحتوي على زوج من الآحاد).



$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} \quad \text{(قبل التبسيط)}$$

$$Y = AB\overline{C} + AD + \overline{A}B\overline{D} + \overline{A}\overline{B} \quad \text{(بعد التبسيط)}$$

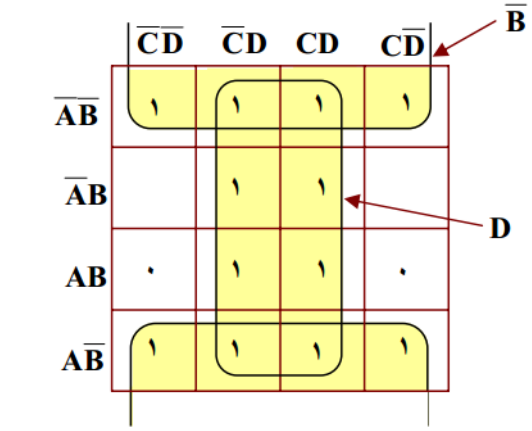
(أ)



$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} \quad \text{(قبل التبسيط)}$$

$$Y = \overline{A}C + \overline{B}C + \overline{D} \quad \text{(بعد التبسيط)}$$

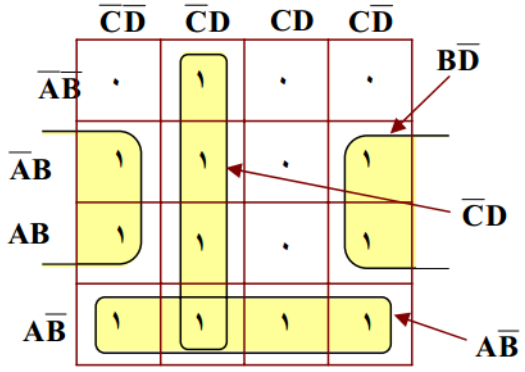
(ب)



$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} \quad \text{(قبل التبسيط)}$$

$$Y = \overline{B} + D \quad \text{(بعد التبسيط)}$$

(حـ)



$$Y = \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} \quad \text{(قبل التبسيط)}$$

$$Y = \overline{C}D + A\overline{B} + B\overline{D} \quad \text{(بعد التبسيط)}$$

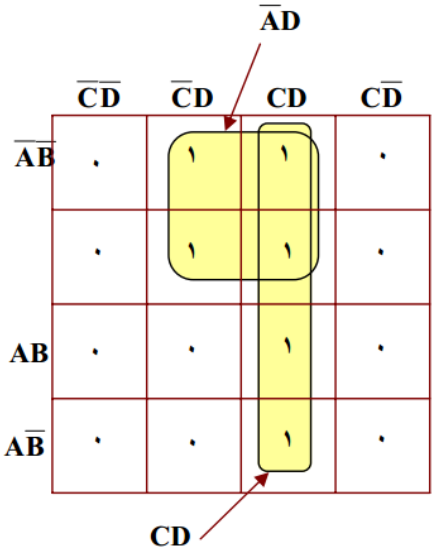
(د)

شكل (٥) أمثلة مختلفة عن التجميع في خرائط كارنوف.

مثال : اكتب التعبير الجبري الذي يمثله جدول الحقيقة المبين في شكل ٦ (أ) ثم قم بتبسيطه باستخدام خريطة كارنوف.

المدخلات				الخرج
A	B	C	D	Y
٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	١	١
٠	٠	١	٠	٠
٠	٠	١	١	١
٠	١	٠	٠	٠
٠	١	٠	١	١
٠	١	١	٠	٠
٠	١	١	١	١
١	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	١	٠
١	٠	١	٠	٠
١	٠	١	١	١
١	١	٠	٠	٠
١	١	٠	١	٠
١	١	١	٠	٠
١	١	١	١	١

شكل ٦ (أ) جدول الحقيقة المطلوب تبسيط الدالة له.



شكل ٦ (ب) خريطة كارنوف

الخطوة الأولى للحصول على التعبير الجبري هي كتابة الحدود التي تعطي الخرج (Y) في جدول الحقيقة والمساوي للقيمة (١) . وبتجميع هذه الحدود يمكننا استنتاج التعبير الجبري وهو كما يلي:

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + A\bar{B}CD + ABCD$$

والخطوة التالية هي رسم خريطة كارنوف لأربعة متغيرات كما نرى في شكل (ب) ، ونقوم بوضع الأحاد التي في عمود الخرج (Y) من جدول الحقيقة في الخلايا المكافئة لها على خريطة كارنوف.

وبالنظر إلى خريطة كارنوف في شكل (ب) نجد أنه يمكن تجميع الآحاد في مجموعتين كل مجموعة تحتوي على أربعة من الآحاد (١'s). وبالتالي فإن الشكل المربع العلوي والذي يحتوي على أربعة آحاد المتغير B المتغير $\bar{B}$ يمكن حذفهما وبالمثل المتغير C ، المتغير $\bar{C}$ وتكون النتيجة هي $\bar{A}D$. وكذلك بالنسبة للشكل المستطيل على الخريطة والذي يحتوي على أربعة آحاد فإنه يمكن حذف كل من المتغيرات B ، $\bar{B}$ ، A ، $\bar{A}$ والنتيجة هي CD. والتعبير الجبري المبسط على ذلك يكون :

$$Y = \bar{A}D + CD$$

واجب 1 /

باستخدام خرائط كارنوف بسط كل من التعبيرات البولينية الآتية:

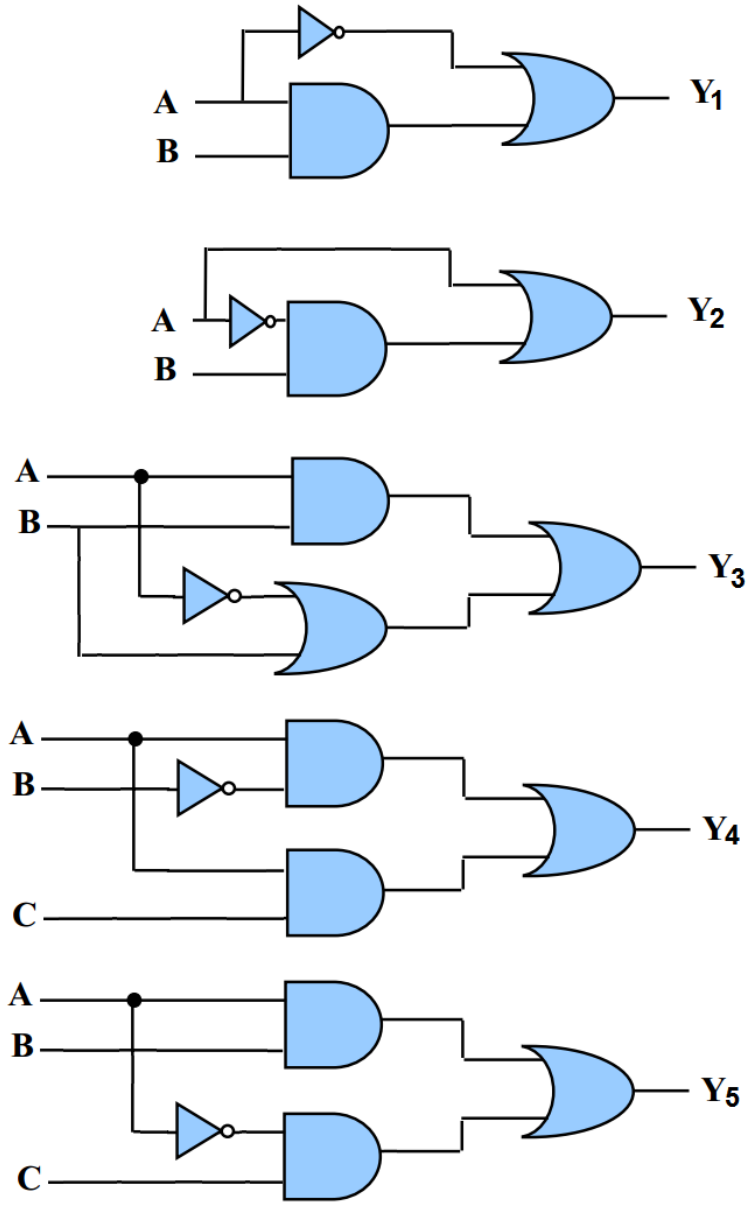
a) $F_1 = A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D} + ABC\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + AB\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D}$

b) $F_2 = ABC\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}D + AB\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + ABC\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D}$

c) $F_3 = \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}D$

d) $F_4 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + +\bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD$

واجب 2 / استخدم خرائط كارنوف لتبسيط الدوائر المنطقية التالية :



البطاقة التعريفية :

الاسم : فؤاد نمر عجيل Fouad Nimr Ajeel

الجنسية : عراقي .

مكان وتاريخ الميلاد : العراق - ذي قار-الرفاعي- 1984 .

الوظيفة : تدريسي في جامعة ذي قار - العراق.

محاضر في جامعة سومر - العراق.

المؤهلات العلمية :

بكالوريوس علوم فيزياء (2006) - كلية العلوم - جامعة ذي قار- العراق.

ماجستير علوم فيزياء (2012) - كلية التربية للعلوم الصرفة - جامعة البصرة - العراق.

الاختصاص الدقيق : الإلكترونيات النانوية Nanoelectronic .

- نشر مجموعة بحوث علمية في مجلات عالمية ومحلية.
- المشاركة في عدة مؤتمرات علمية دولية.
- الاشراف العلمي على اكثر من 15 بحث تخرج.
- مشرف على مجموعة ومدونة فيزيائيون.

للأخوة الاعزاء صدر لنا :

- مفاهيم أساسية في تقنية النانو.
- كيف تنشر بحثاً علمياً في مجلة محكمة.
- شرح برنامج الرسام اوريجن 8 المتخصص برسم وتحليل ومعالجة البيانات.
- طريقة كتابة تقارير التجارب الفيزيائية.
- تجارب مختبر الفيزياء الذرية.
- تجارب مختبر الالكترونيات التماثلية.
- تجارب مختبر الالكترونيات المنطقية.
- تجارب مختبر الصوت والحركة الموجية.
- تجارب مختبر الحرارة والثرموداينمك.
- تجارب مختبر الكهربائية والمغناطيسية.
- تجارب مختبر الميكانيك والفيزياء العامة.